RESOLUCIÓN DE ALGUNOS EJERCICIOS DE EJEMPLO DEL TEMA 11

En esta presentación-tutorial vamos a ver como resolver algunos ejercicios del tema 11. No van a ser los mismos enunciados, pero os servirá de guía para entenderlos.

EJERCICIO 1: DETERMINACIÓN DEL ÁREA DE FIGURAS VOLUMÉTRICAS

- A) Calcula el área de un **prisma de base triangular** que tiene una **altura de 15 cm** y cuya **base** es un **triángulo equilátero de 10 cm de lado**.

Paso 1: **SIEMPRE** debemos empezar en todos los problemas colocando datos. Los datos son:

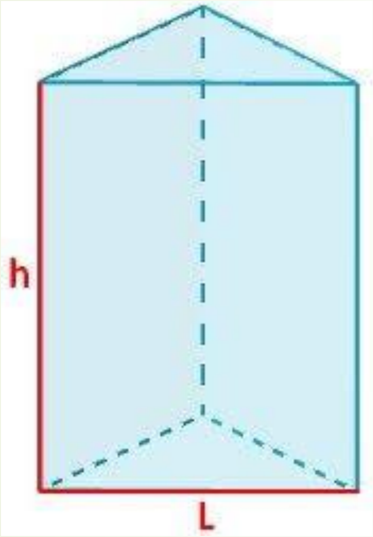
Base: es un triángulo equilátero de 10 cm de lado.

Altura del prisma: mide 15 cm.

Nota 1: dice altura, lo cual se refiere a la altura del prisma, no de la base. Si fuera altura de la base tendría que indicarlo debidamente.

EJERCICIO 1: DETERMINACIÓN DEL ÁREA DE FIGURAS VOLUMÉTRICAS

Paso 2: hago un dibujo de lo que nos piden (siempre es mejor):



La altura del prisma es h

El lado del prisma es L

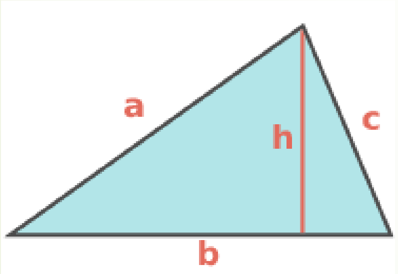
Paso 3: pongo la fórmula del área:

$$A = A_L + 2 \cdot A_B \qquad \begin{cases} A_B \rightarrow \text{Área de la base} \\ A_L \rightarrow \text{Área lateral} \end{cases}$$

EJERCICIO 1: DETERMINACIÓN DEL ÁREA DE FIGURAS VOLUMÉTRICAS

Paso 4: analizo lo que pone en la fórmula:

- La base es un triángulo, con lo cual debo calcular el área de un triángulo. El área de un triángulo se calcula así:



$$A = \frac{b \cdot h}{2}$$

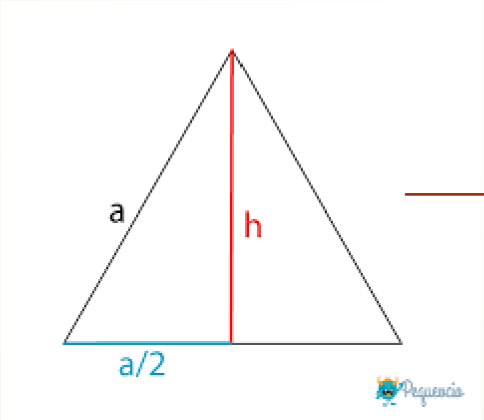
- El área lateral se calcula de la siguiente manera:

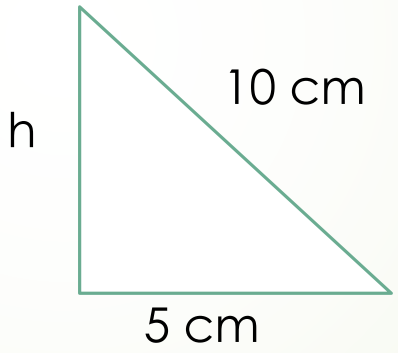
$$A_L = P_B \cdot h \quad \begin{cases} P_B \rightarrow perímetro\ de\ la\ base \\ h \rightarrow altura\ del\ prisma \end{cases}$$

EJERCICIO 1: DETERMINACIÓN DEL ÁREA DE FIGURAS VOLUMÉTRICAS

Paso 5: calculo el área de la base

- Recordemos que tenemos un triángulo equilátero **(tres lados iguales)** de lado 10 cm. Para calcular el área necesito sacar la altura.





$$10^2 = h^2 + 5^2$$

$$10^2 - 5^2 = h^2$$

$$100 - 25 = h^2$$

$$h^2 = 75$$

$$h = \sqrt{75} = 8{,}66\ cm$$

Si observamos el triángulo, este se divide en dos triángulos rectángulos, luego aplico Pitágoras y saco la altura. Si ahora saco el área de la base:

$$A_B = \frac{base \cdot altura}{2} = \frac{8{,}66 \cdot 10}{2} = 43{,}3\ cm^2$$

EJERCICIO 1: DETERMINACIÓN DEL ÁREA DE FIGURAS VOLUMÉTRICAS

Paso 6: calculo el área lateral y el área total:

Como ya sabemos el perímetro de cualquier figura es la suma de todos los lados. Recordando que el área lateral es la fórmula:

$$A_L = P_B \cdot h \quad \begin{cases} P_B \rightarrow \textit{perímetro de la base} \\ h \rightarrow \textit{altura del prisma} \end{cases}$$

Sabemos que P_B=10+10+10=30 cm

Con lo cual: $A_L = 30 \cdot 15 = 450\ cm^2$

Si calculo entonces el área total de la figura será:

$$\boldsymbol{A = A_L + 2 \cdot A_B}$$

$$A = 450 + 2 \cdot 43{,}3 = 536{,}6\ cm^2$$

EJERCICIO 1: DETERMINACIÓN DEL ÁREA DE FIGURAS VOLUMÉTRICAS

- B) Calcula el área de una **pirámide hexagonal regular** de 8 cm de lado y de altura 12 cm.

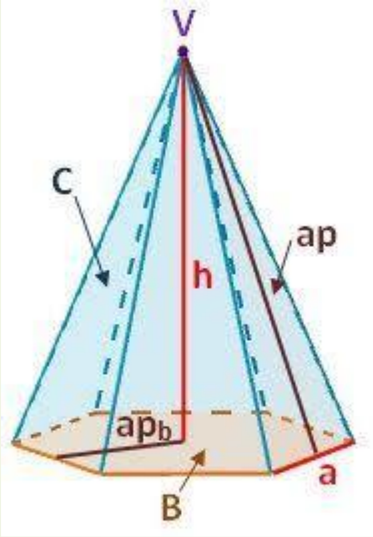
Paso 1: **SIEMPRE** debemos empezar en todos los problemas colocando datos. Los datos son:

Base: hexágono regular de 8 cm de lado.

Altura de la pirámide: 12 cm.

EJERCICIO 1: DETERMINACIÓN DEL ÁREA DE FIGURAS VOLUMÉTRICAS

Paso 2: hago un dibujo de lo que nos piden (siempre es mejor):



La altura de la pirámide es h

ap es la apotema de la pirámide

ap_bes la apotema de la base

a es el lado de la base

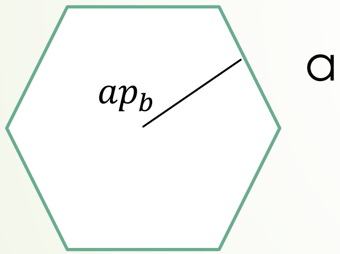
Paso 3: pongo la fórmula del área:

$$A = A_L + A_B \qquad \begin{cases} A_B \rightarrow \text{Área de la base} \\ A_L \rightarrow \text{Área lateral} \end{cases}$$

EJERCICIO 1: DETERMINACIÓN DEL ÁREA DE FIGURAS VOLUMÉTRICAS

Paso 4: analizo lo que pone en la fórmula:

- La base es un hexágono regular, con lo cual para calcular su área debo seguir la expresión:



$$A = \frac{P_B \cdot ap_B}{2} \quad \begin{cases} P_B \rightarrow perímetro\ de\ la\ base \\ ap_B \rightarrow apotema\ de\ la\ base \end{cases}$$

- El área lateral se calcula de la siguiente manera:

$$A_L = \frac{P_B \cdot ap}{2} \quad \begin{cases} P_B \rightarrow perímetro\ de\ la\ base \\ ap \rightarrow apotema\ de\ la\ pirámide \end{cases}$$

EJERCICIO 1: DETERMINACIÓN DEL ÁREA DE FIGURAS VOLUMÉTRICAS

Paso 5: calculo el área de la base

- El mayor problema está en el cálculo del área de la base de una pirámide. Hay tres casos bien diferenciados:

Caso 1: base triangular (ya hecho en el prisma)

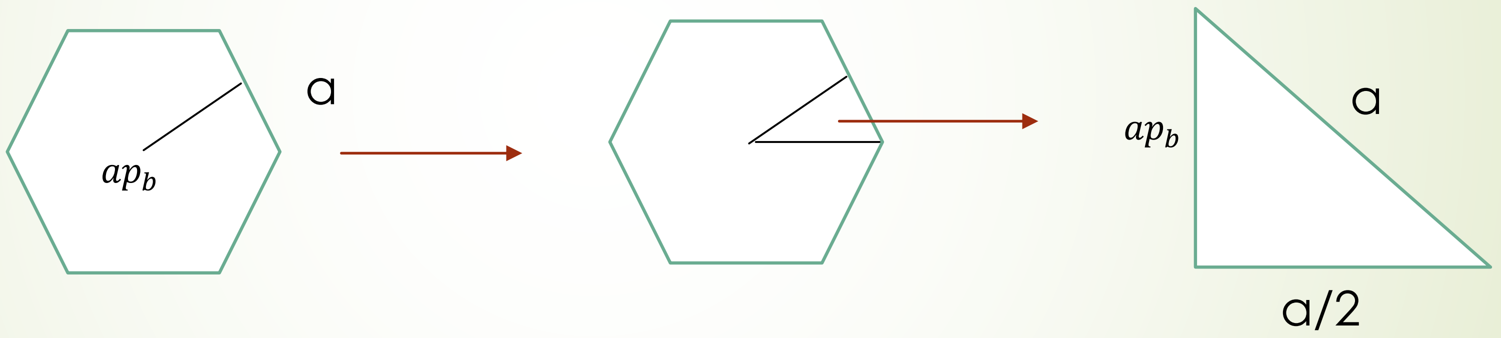
Caso 2: base cuadrada (se aplica el área del cuadrado)

Caso 3: base polígono regular (se aplica el área vista en la diapositiva anterior)

EJERCICIO 1: DETERMINACIÓN DEL ÁREA DE FIGURAS VOLUMÉTRICAS

Paso 5: calculo el área de la base

- Aplico ahora el teorema de Pitágoras para un triángulo que se pueda sacar desde la base:



Puedo sacar un triángulo rectángulo formado por dos catetos, que son la apotema del polígono regular y la mitad del lado del polígono regular. La hipotenusa es directamente el lado del polígono regular, porque recordamos que en un polígono regular el radio de la circunferencia circunscrita (la que va por fuera del polígono) coincide con el lado del mismo.

EJERCICIO 1: DETERMINACIÓN DEL ÁREA DE FIGURAS VOLUMÉTRICAS

Paso 5: calculo el área de la base

- Para los valores del polígono, el triángulo nos queda:

$$ap_b{}^2 = 8^2 - 4^2$$

$$ap_b = \sqrt{48} = 6{,}93\ cm$$

Introduciendo la expresión del área: $A = \frac{P_B \cdot ap_B}{2} = \frac{48 \cdot 6{,}93}{2} = 166{,}32\ cm^2$

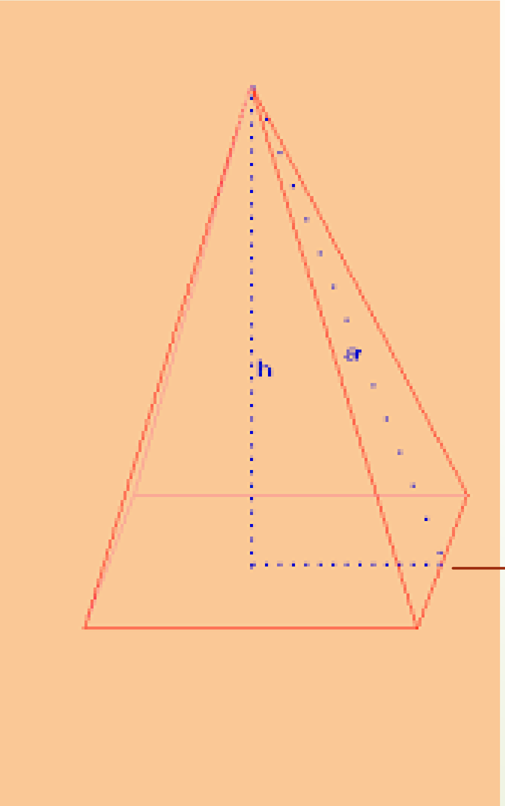
Paso 6: calculo el área lateral:

$$A_L = \frac{P_B \cdot ap}{2} \quad \begin{cases} P_B \rightarrow perímetro\ de\ la\ base \\ ap \rightarrow apotema\ de\ la\ pirámide \end{cases}$$

EJERCICIO 1: DETERMINACIÓN DEL ÁREA DE FIGURAS VOLUMÉTRICAS

- **Paso 6:** calculo el área lateral:

IMPORTANTE: aquí esta la dificultad del problema. Hay que recordar esto:



1º) La altura de la pirámide, con el apotema de la pirámide y con otro lado forma un triángulo rectángulo. Observad la siguiente figura.

El lado de abajo en azul discontinuo no sabemos su medida.

EJERCICIO 1: DETERMINACIÓN DEL ÁREA DE FIGURAS VOLUMÉTRICAS

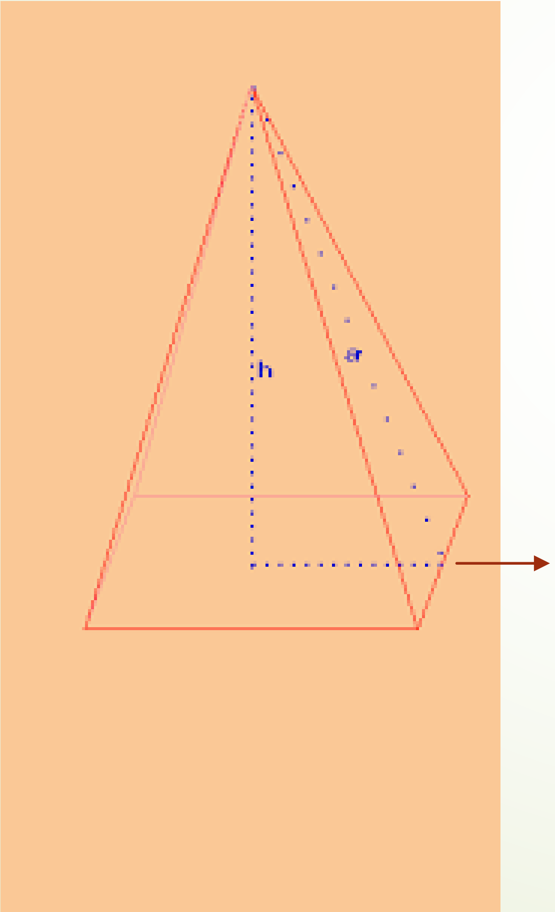
- **Paso 6:** calculo el área lateral:

IMPORTANTE: debemos entonces saber lo siguiente:

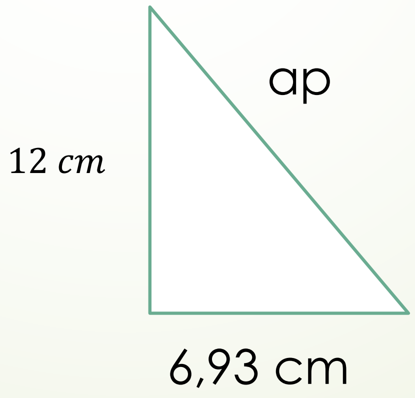
- Si la pirámide tiene base cuadrada, esa medida de abajo es la mitad del lado.
- Si la pirámide es un polígono regular, esa medida de abajo es la apotema de la base.

EJERCICIO 1: DETERMINACIÓN DEL ÁREA DE FIGURAS VOLUMÉTRICAS

- **Paso 6:** calculo el área lateral:



Nuestra base es hexagonal, con lo cual la parte azul de abajo es la apotema de la base.



Aplicamos Pitágoras:

$$ap^2 = 12^2 + 6{,}93^2$$

$$ap^2 = 144 + 48$$

$$ap = \sqrt{192} = 13{,}86\ cm$$

EJERCICIO 1: DETERMINACIÓN DEL ÁREA DE FIGURAS VOLUMÉTRICAS

- **Paso 6:** calculo el área lateral:

El área lateral será entonces: $A_L = \frac{P_B \cdot ap}{2} = \frac{48 \ \cdot 13{,}86}{2} = 332{,}64 \ cm^2$

- **Paso 7:** calculo el área total:

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A_L} + \boldsymbol{A_B} = 332{,}64 + 166{,}32 = 498{,}96 \ cm^2$$

EJERCICIO 2: DETERMINACIÓN DEL AREA DE UNA FIGURA DE REVOLUCIÓN

- **Calcula el área de un cono cuya altura son 14 cm y tiene una base de área 78,5 centímetros cuadrados.**

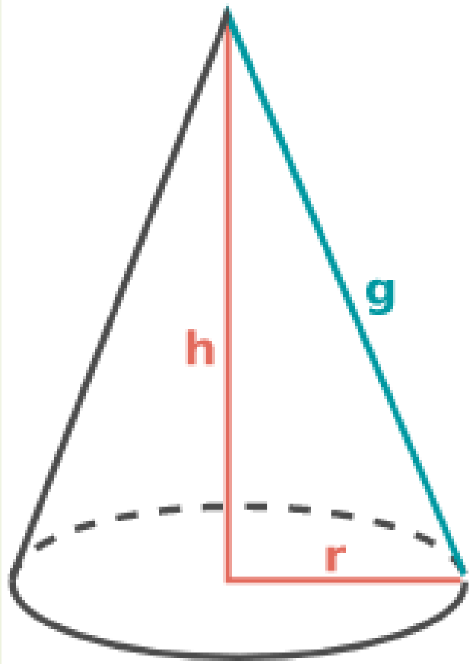
Paso 1: SIEMPRE debemos empezar en todos los problemas colocando datos. Los datos son:

Altura del cono: 14 cm

Área de la base son 78,5 centímetros cuadrados

EJERCICIO 2: DETERMINACIÓN DEL AREA DE UNA FIGURA DE REVOLUCIÓN

Paso 2: dibujamos la figura que nos piden. En este caso es un cono.



En el cono tenemos los siguientes elementos:

g: generatriz del cono.

h: altura del cono.

r: radio de la base del cono.

La base del cono es un círculo.

Paso 3: pongo el área del cono:

$$\boldsymbol{A = A_L + A_B = \pi r g + \pi r^2}$$

EJERCICIO 2: DETERMINACIÓN DEL AREA DE UNA FIGURA DE REVOLUCIÓN

Como vemos, el área de la base es el área del círculo.

Nota 2: **ojo!** Debo tener en cuenta que ahora no me dan el radio ni la generatriz, solo nos dan altura y el área de la base, con lo cual procedemos de la siguiente manera:

Paso 4: saco en primer lugar el radio a partir del área de la base, ya que es un círculo y nos permitirá sacar el valor del radio:

$$\boldsymbol{A_B = \pi r^2}$$

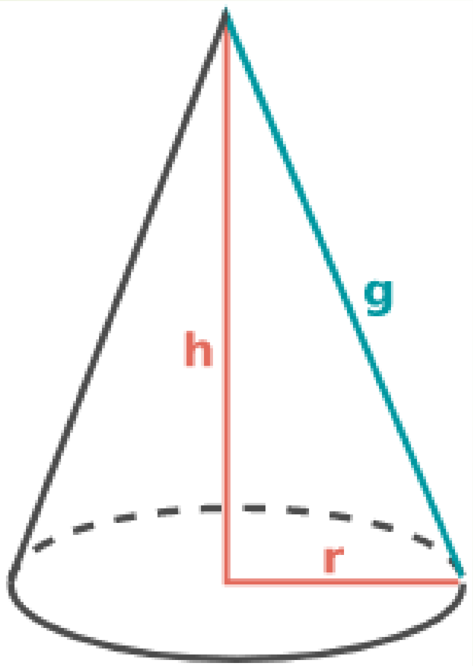
Sustituyo datos

$$78{,}5 = 3{,}14 \cdot r^2$$

Despejo r: $r^2 = \frac{78{,}5}{3{,}14} \quad \rightarrow \quad r^2 = \sqrt{25} \quad \rightarrow \quad r = 5\ cm$

EJERCICIO 2: DETERMINACIÓN DEL AREA DE UNA FIGURA DE REVOLUCIÓN

Paso 5: saco ahora la generatriz. Para ello debo acordarme de que el cono se genera a partir de un triángulo rectángulo que gira sobre su altura:



Aplicamos Pitágoras, sabiendo que la generatriz es la hipotenusa del triángulo.

$h = 14\ cm\ ; \quad r = 5\ cm$

$g^2 = h^2 + r^2$

$g^2 = 14^2 + 5^2$

Operando se obtiene: $g = 14,87\ cm$

EJERCICIO 2: DETERMINACIÓN DEL AREA DE UNA FIGURA DE REVOLUCIÓN

Paso 6: saco su área con la fórmula.

$$A = A_L + A_B = \pi r g + \pi r^2$$

Sustituyendo los datos:

$$A = 3,14 \cdot 5 \cdot 14,87 + 3,14 \cdot 5^2$$

$$A = 233,459 + 78,5 = 311,959\ cm^2$$

EJERCICIO 3: DETERMINACIÓN DE ELEMENTOS A PARTIR DE ÁREAS

En estos dos apartados vamos a ver como sacar elementos a partir de áreas dadas. **Solo debemos despejar adecuadamente**.

- **A) Calcular el lado de la base de un prisma de base cuadrada de altura 10 cm y área 312 centímetros cuadrados.**

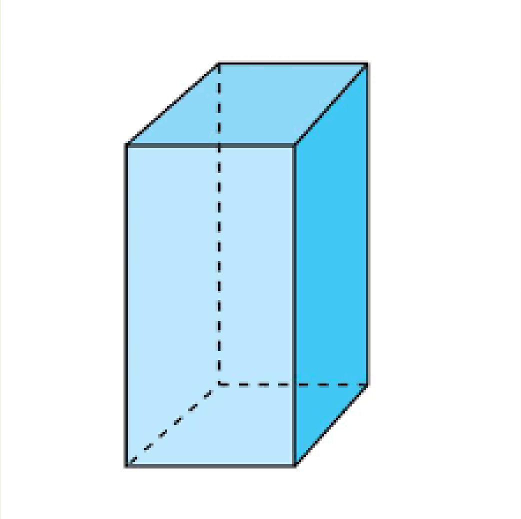
Paso 1: en primer lugar, colocamos los datos que nos dan y la fórmula del área:

Altura del prisma: 10 cm

$$\boldsymbol{A = A_L + 2 \cdot A_B}$$

Área total: 276 centímetros cuadrados

EJERCICIO 3: DETERMINACIÓN DE ELEMENTOS A PARTIR DE ÁREAS



Sabemos que la base es un cuadrado, con lo cual.

$A_B = \acute{A}rea\ cuadrado = lado^2$

$A_L = P_B \cdot h$

P_B es el perímetro de la base.

h es la altura del prisma.

x es el lado del prisma.

Ahora sustituyo datos en el área total:

$$\boldsymbol{A = A_L + 2 \cdot A_B}$$

$$312 = P_B \cdot h + 2 \cdot x^2$$

EJERCICIO 3: DETERMINACIÓN DE ELEMENTOS A PARTIR DE ÁREAS

El perímetro de la base será: $P_B = 4 \cdot \mathrm{x}$, ya que no conocemos el lado. Luego, sustituyendo en la fórmula anterior:

$$312 = 4 \cdot \mathrm{x} \cdot 10 + 2 \cdot x^2$$

Esto es una ecuación de segundo grado. Paso todo a la derecha y ordeno:

$$2x^2 + 40x - 312 = 0$$

Solucionando la ecuación:

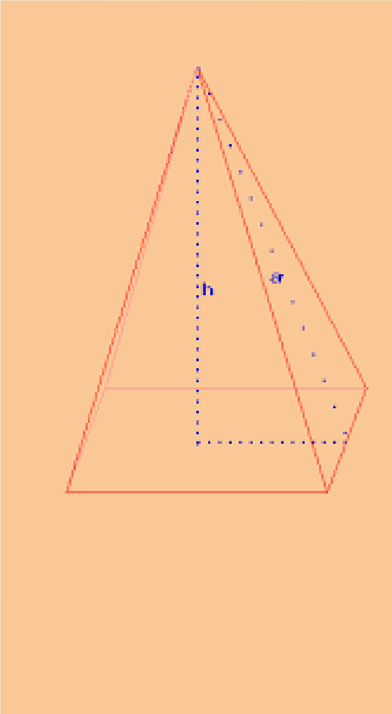
$$x = \frac{-40 \pm \sqrt{40^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-312)}}{2 \cdot 2}$$

Operando se obtiene:

$$x = \frac{-40 \pm 64}{4} \rightarrow x = 6\ cm \ \ (Solo\ nos\ quedamos\ con\ la\ positiva.\ Es\ una\ medida)$$

EJERCICIO 3: DETERMINACIÓN DE ELEMENTOS A PARTIR DE ÁREAS

- **B) Calcula la apotema de una pirámide cuadrada de 5 cm de base y área total 175 centímetros cuadrados.**



En primer lugar, definimos su área:

$$\boldsymbol{A = A_L + A_B \quad \rightarrow \quad A = \frac{P_B \cdot ap}{2} + A_B}$$

Sabemos que la base es cuadrada, con lo cual:

$$\boldsymbol{A_B = lado^2}$$

Sustituyendo datos en la fórmula del área: $175 = \frac{20 \cdot ap}{2} + 5^2$

Operando: $175 = \frac{20 \cdot ap}{2} + 25 \rightarrow 175 - 25 = \frac{20ap}{2} \rightarrow 150 = \frac{20ap}{2} \rightarrow ap = \frac{150 \cdot 2}{20} = 15\ cm$